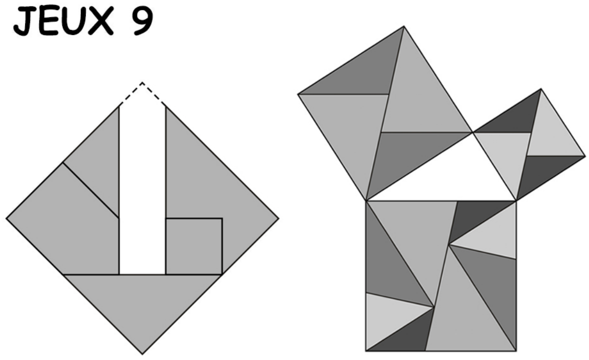
APMEP - Dossier n° 2154

Les puzzles... de Pythagore-2 de Saint-Max

Activités extraites
de la brochure APMEP n° 194
JEUX 9



Domaine : Géométrie

Cycles 3 et 4

Avec les solutions

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

APMEP - Brochure n° 194 - 2011

Numéro ISBN : 978-2-912846-69-3

Des puzzles géométriques
Présentation

Les puzzles sont devenus un support très prisé dans l'enseignement des mathématiques. Nous n'échappons pas à la règle avec ces deux premiers puzzles, l'un très connu, celui de Pythagore, l'autre moins, celui de Saint-Max.

Le Puzzle de Pythagore-2

On ne compte plus les puzzles de Pythagore. Celui-ci porte le numéro 2 car il fait suite à un autre puzzle de Pythagore paru dans la brochure « JEUX 8 ». C'est une manière de le distinguer ! Celui-ci est un peu particulier car aucune des pièces qui le composent n'a de côtés perpendiculaires. Il orne la couverture d'un document qu'on peut qualifier d'exceptionnel : « Aire et périmètre » réalisé en 2001 par le groupe national de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en dispositifs relais dont certains membres sont bien connus à l'APMEP (François Boule, André Pressiat, Dominique Roux…), document que vous pouvez télécharger à l'adresse suivante : http://eduscol.education.fr/cid47903/aire-et-perimetre.html .

Les activités proposées à partir de ce puzzle sont très progressives.

Fiche 1. « Demandez le programme ! »
La configuration de Pythagore (les trois carrés) étant donnée, il s'agit de dessiner les pièces du puzzle dans les deux plus petits carrés par un programme de construction. Cette fiche est accessible dès la sixième.

Fiches 2 et 3. « Un petit contrôle ? »
L'objectif est de « contrôler » que les huit pièces construites dans l'activité précédente recouvrent bien le grand carré. Il faut rechercher dans cette activité, non pas des démonstrations rigoureuses qui seraient fastidieuses, mais une occasion de développer oralement des arguments basés sur les propriétés géométriques classiques de la classe de cinquième : parallélisme et angles, symétrie centrale. Projetée au tableau, (rétro ou vidéoprojecteur, visualiseur), la figure peut être soumise au questionnement de toute la classe.
Nous avons choisi de ne pas définir les points P, Q, R, S et T du carré ABIJ pour ne pas alourdir l'activité. Mais un petit programme de construction à partir des éléments des carrés ACFG et BCDE est tout à fait possible, la droite (PR), parallèle à (AF), passant par C.

Fiches 4 à 6. « Matériel » et « Variations »
La fiche 4 agrandie par photocopie, collée sur du carton puis découpée permet d'avoir deux jeux de pièces. Ces fiches apportent le prolongement ludique à ces activités. La construction de la fiche 1 n'aura pas été gratuite ; les pièces serviront à réaliser les « variations » proposées ici.

Fiches 7 et 8. « Jeu de cercles »
Nous faisions remarquer qu'aucune des pièces n'avait de côtés perpendiculaires. Mais les angles droits apparaissent bien sûr dans leurs assemblages. On découvre ainsi des triangles rectangles ayant une hypoténuse commune et on obtient des quadrilatères inscrits dans des cercles : des contenus abordés en classe de quatrième.

Fiches 9 et 10. « Agrandissement – réduction »
Il est question ici des deux plus petits carrés, ceux-ci étant agrandissement ou réduction l'un de l'autre. Ils entrent dans la configuration des triangles à côtés proportionnels vue en quatrième. En troisième, on peut bien sûr faire intervenir la propriété de Thalès.

Remarque : la construction des pièces est rappelée sur chaque fiche pour que les activités puissent être proposées indépendamment les unes des autres.

Le Puzzle de Saint-Max

Ce puzzle a été repéré, il y a quelques années, dans le magasin d'usine du dernier fabricant de cartes à jouer français, à Saint-Max, dans la banlieue nancéenne. Édité par « Kubi-games.Allemagne » sous le nom « sans commentaires », nous avons préféré l'appeler entre nous « Puzzle de Saint-Max ».

Fiches 1 et 3. « Avec trois carrés »
Ce puzzle est composé de cinq pièces dont une carrée. Avec les quatre pièces non carrées, on peut réaliser un carré. En incluant la cinquième pièce carrée, on peut réaliser un nouveau carré. On se retrouve tout naturellement devant la configuration du théorème de Pythagore avec ses trois carrés (niveau quatrième).

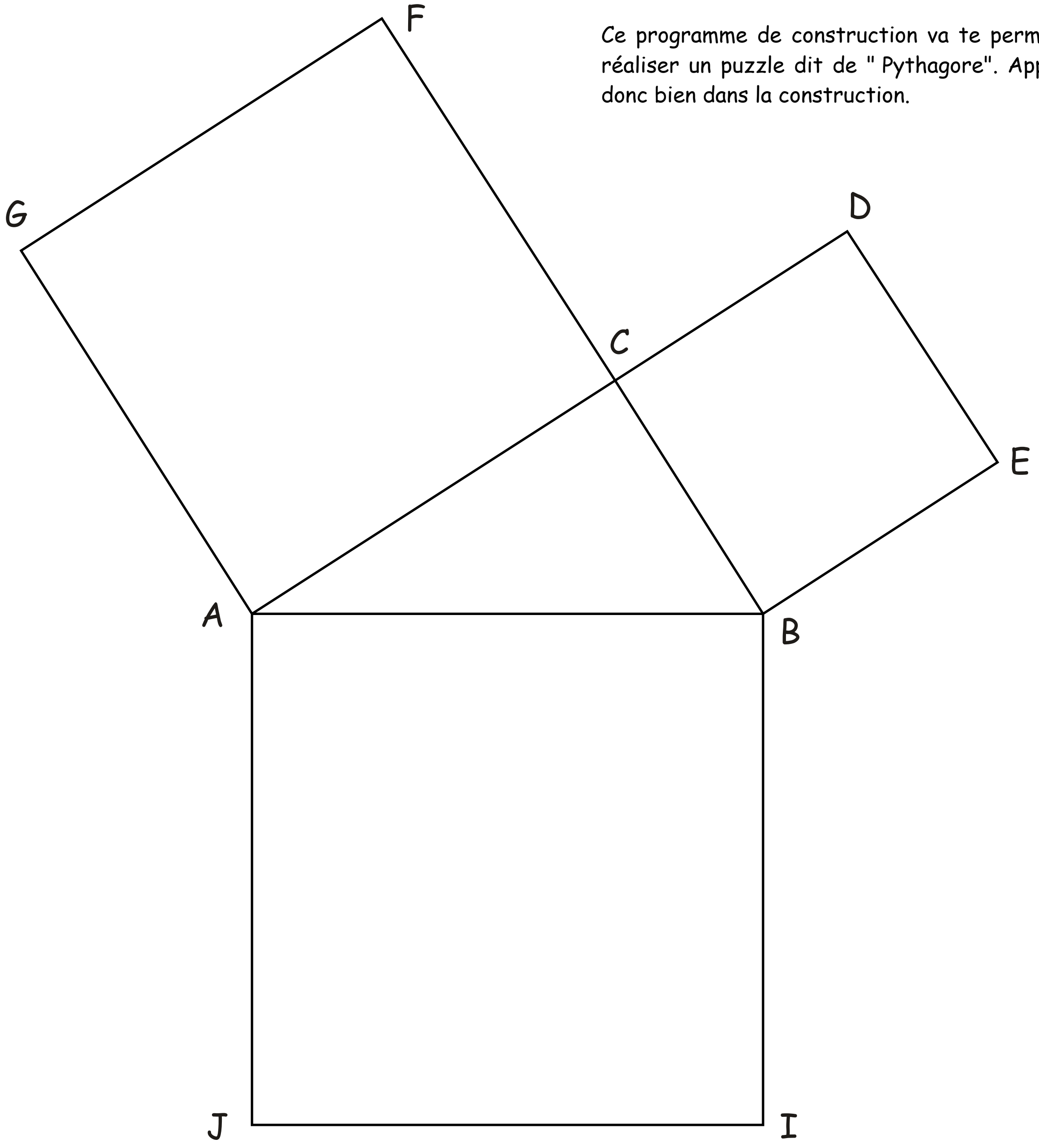
Fiches 2 et 3. « Un troisième carré »
Les cinq pièces du puzzle peuvent être disposées d'une autre manière et servir de base à un troisième carré, plus grand que les deux précédents, dont il manque une pièce. Il s'agit de montrer qu'on a bien un « début » de carré et de trouver les dimensions de la pièce qui « terminera » ce carré.

Fiches 4 et 5. « Des figures »
Ces fiches sont tout naturellement le prolongement ludique de ces activités. Les configurations sont à réaliser avec les cinq pièces initiales du puzzle.

Remarque : les deux premières fiches proposent la même première activité pour qu'elles puissent être utilisées indépendamment l'une de l'autre.

Puzzle de Pythagore-2
Demandez le programme !

Ce programme de construction va te permettre de réaliser un puzzle dit de " Pythagore". Applique-toi donc bien dans la construction.



BCDE, ACFG et ABIJ sont trois carrés construits sur les côtés du triangle ABC rectangle en C.

Trace les segments [AF] et [BD].

Les parallèles à (AB) passant par C et par E coupent le segment [BD] respectivement en K et L.

Les parallèles à (AB) passant par C et par G coupent le segment [AF] respectivement en M et N.

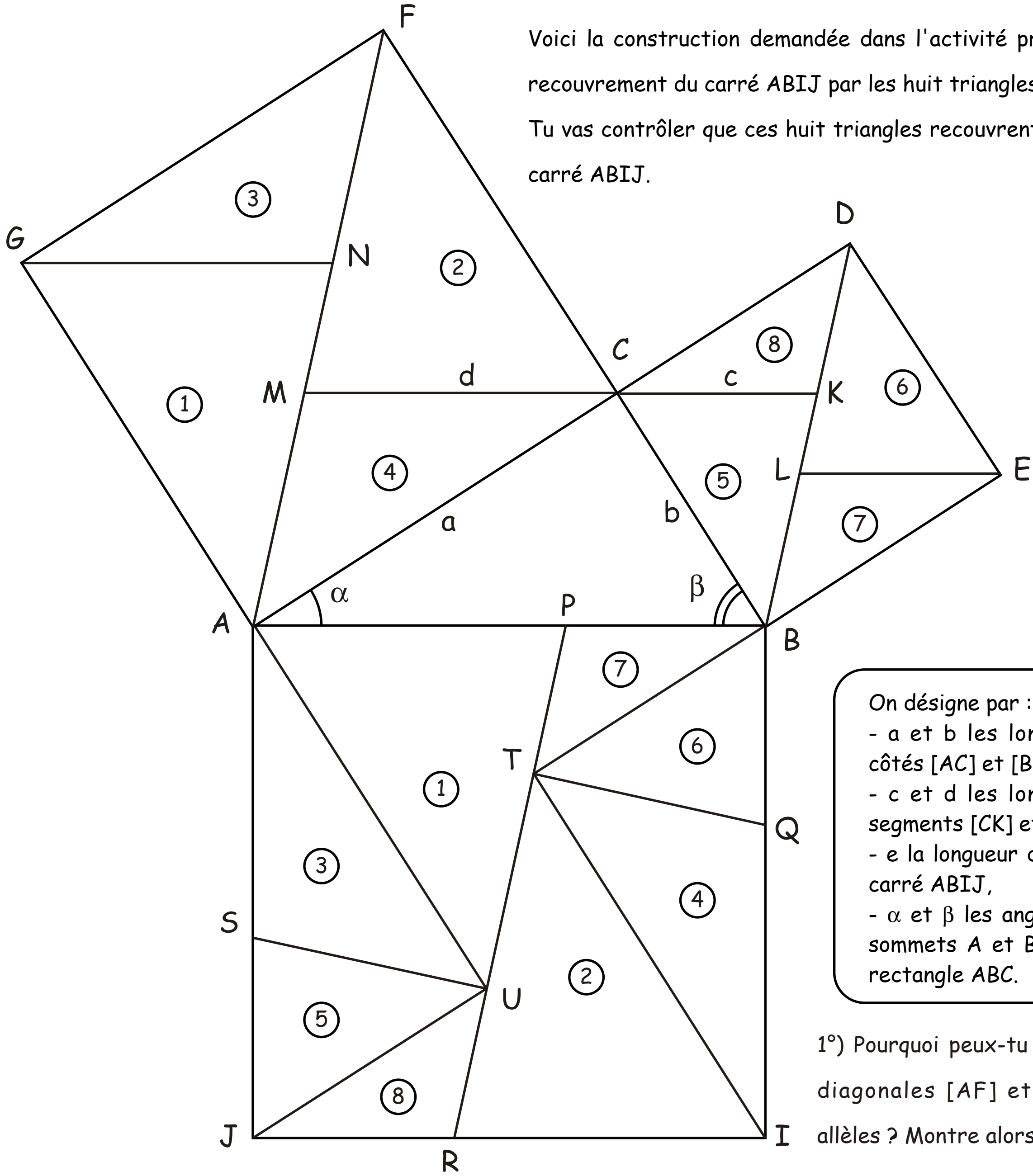
Tu obtiens ainsi huit triangles : ELB, ELD, CKB, CKD, CMA, CMF, GNA et GNF. Découpe ces triangles.

Avec ces huit pièces, tu peux recouvrir exactement le carré ABIJ. Amuse-toi bien !

Puzzle de Pythagore-2

Un petit contrôle ?

Voici la construction demandée dans l'activité précédente et le recouvrement du carré ABIJ par les huit triangles.
Tu vas contrôler que ces huit triangles recouvrent exactement le carré ABIJ.



On désigne par :
- a et b les longueurs des côtés [AC] et [BC],
- c et d les longueurs des segments [CK] et [CM],
- e la longueur des côtés du carré ABIJ,
- α et β les angles aigus de sommets A et B du triangle rectangle ABC.

1°) Pourquoi peux-tu affirmer que les diagonales [AF] et [BD] sont parallèles ? Montre alors que c + d = e.

2°) On considère d'abord la figure composée du triangle ABC et des deux carrés BCDE et ACFG.

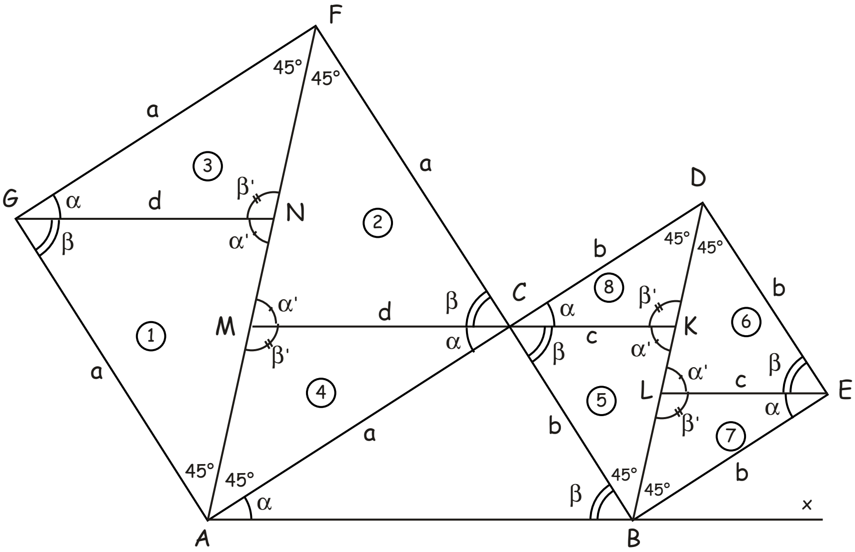
- Montre que les triangles (1) et (2), (3) et (4), (5) et (6), (7) et (8) sont deux à deux superposables.
- Dans ces triangles, nomme par a, b, c, d, α et β les côtés et les angles que tu connais. Marque aussi les angles de 45°.
- Montre que les angles $\widehat{ANG}$ et $\widehat{AMC}$ sont respectivement égaux à $\alpha' = \alpha + 45°$ et $\beta' = \beta + 45°$.

3°) On considère maintenant le carré ABIJ.

- Montre que les pièces (1) et (7) se juxtaposent bien contre le côté [AB] (longueurs et angles).
- Montre que les pièces (1) et (2) d'une part, (7) et (8) d'autre part se correspondent dans une symétrie centrale.
- Quelle est la nature des triangles BTI et JUA ? Montre que les pièces (4) et (6), ou (3) et (5) les recouvrent bien.

Puzzle de Pythagore-2

Un petit contrôle ? (Éléments de solutions)



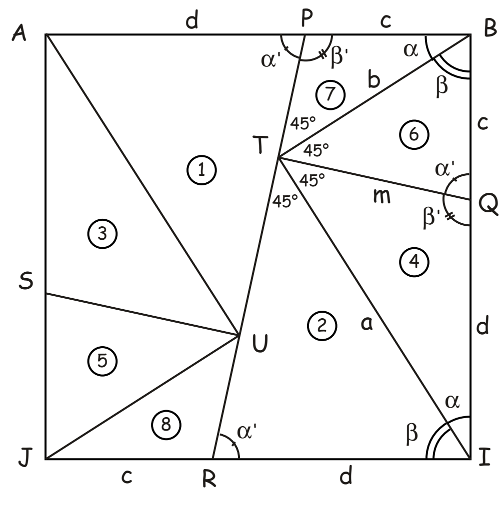
1°) (AC)//(BE). Les angles correspondants $\widehat{CAB}$ et $\widehat{EBx}$ sont égaux. Donc les angles correspondants $\widehat{FAB}$ et $\widehat{DBx}$ sont égaux, et donc les droites (AF) et (BD) sont parallèles. ABKM est alors un parallélogramme et donc c + d = AB = e.

2°) Considérons les pièces (1) et (2). Dans la symétrie centrale conservant le carré ACFG, A et G ont pour images F et C. Dans une symétrie centrale, un segment et son image étant parallèles, le segment [GN] a pour image le segment [CM] ; l'image de N est alors M. Les pièces (1) et (2) sont donc symétriques l'une de l'autre et donc superposables.

On démontre de la même manière que les autres pièces sont deux à deux superposables, ce qui permet de noter tous les segments et les angles de même mesure.

L'angle $\widehat{ANG}$ est le supplémentaire de l'angle $\widehat{GNF}$ qui lui-même est le supplémentaire de α + 45° (somme des angles d'un triangle). Donc $\widehat{ANG} = \alpha + 45° = \alpha'$. On démontre de la même manière que $\widehat{AMC} = \beta + 45° = \beta'$.

3°) AP + PB = GN + LE = d + c = AB. $\widehat{APU} = \widehat{GNA} = \alpha'$ et $\widehat{BPT} = \widehat{ELB} = \beta'$.



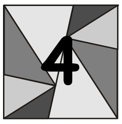
α' et β' étant supplémentaires, les points P, T et U sont alignés.

On démontre de la même manière que les pièces (2) et (8) se juxtaposent contre le côté [IJ] et donc que les points R, U et T sont alignés.

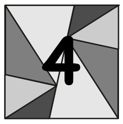
En définitive, les quatre points P, T, U et R sont alignés et les pièces (2) et (8) sont images des pièces (1) et (7) par la symétrie centrale conservant le carré ABIJ.

Compte tenu des mesures des angles des pièces (2) et (7), on observe que $\widehat{BTI}$ est un angle droit dont les côtés sont a et b. Les triangles BTI et JUA sont donc deux triangles rectangles superposables au triangle ABC.

Les mesures des côtés et des angles des pièces (4) et (6) correspondent bien à celles des côtés et des angles du triangle rectangle BTI. On peut aussi remarquer que la longueur m du segment [TQ] correspond bien à la longueur commune des segments [DL] et [AM] des pièces (6) et (4). En effet, par symétrie dans le carré BCDE, DL = BK et du fait que ABKM est un parallélogramme, BK = AM. Donc DL = AM = m.

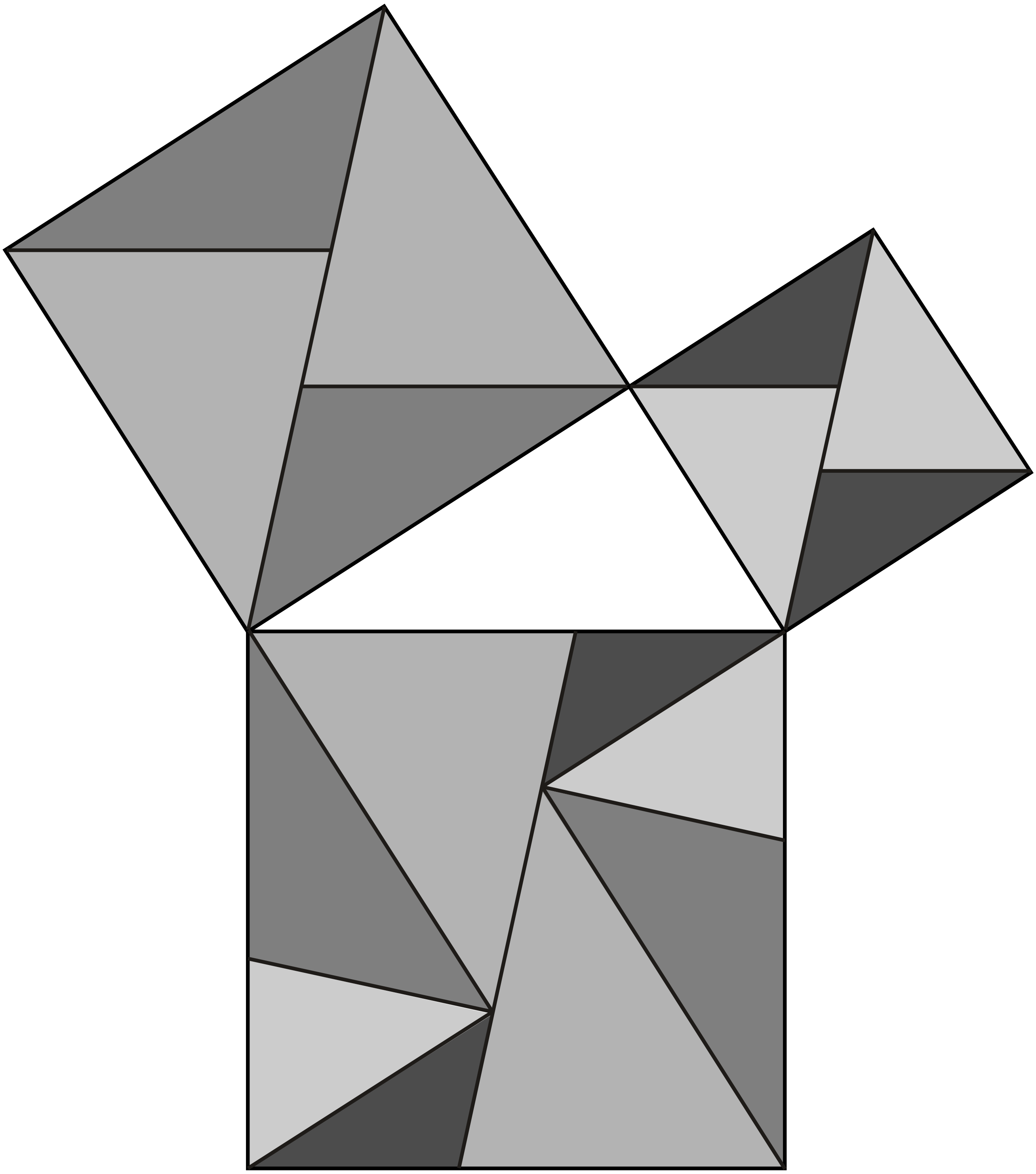


Puzzle de Pythagore-2



Matériel

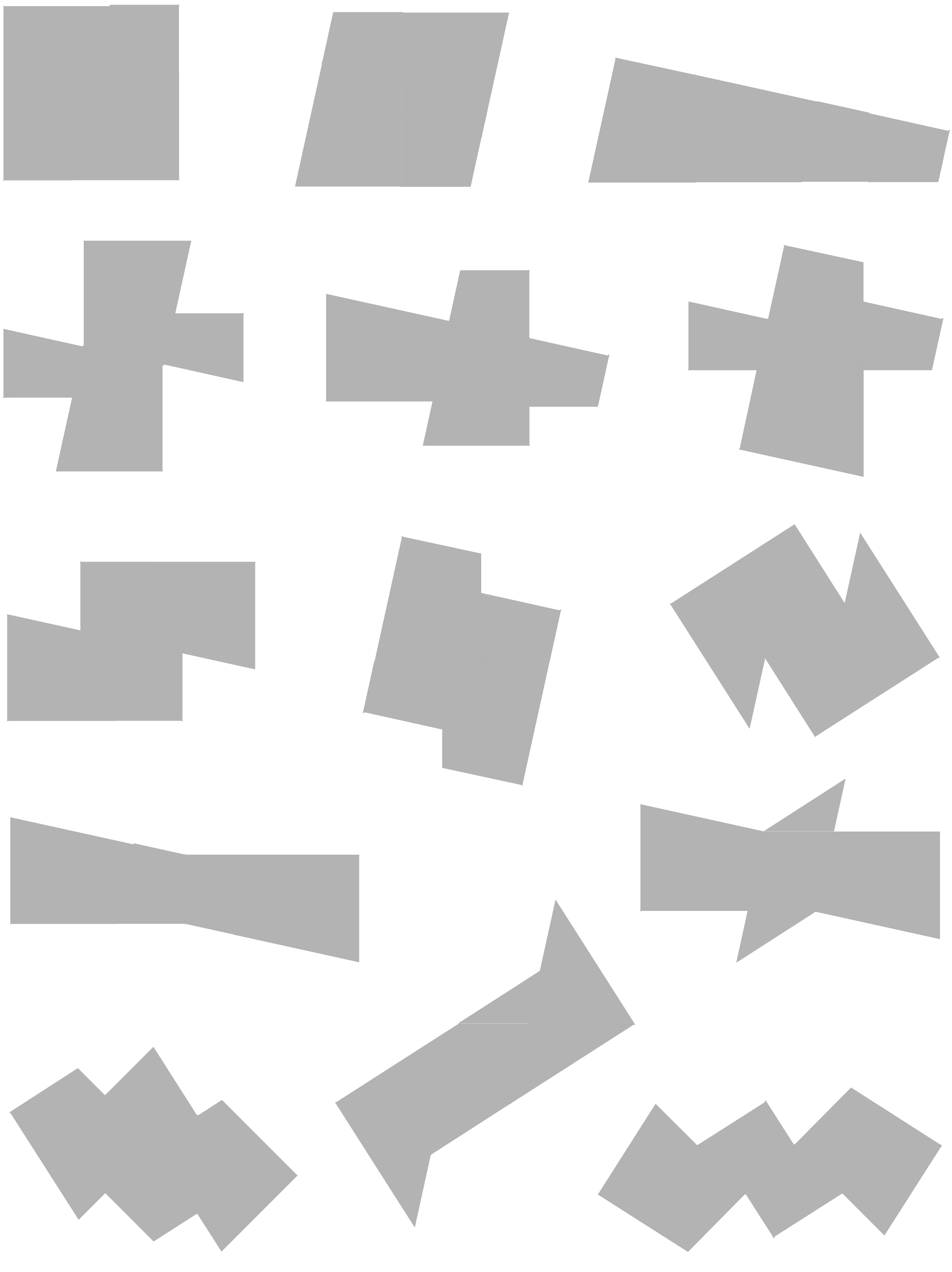
Pour avoir un puzzle en couleur, tu peux utiliser la construction que tu as faite sur la fiche 1 et colorier les pièces de quatre couleurs, les pièces identiques étant d'une même couleur.



Puzzle de Pythagore-2

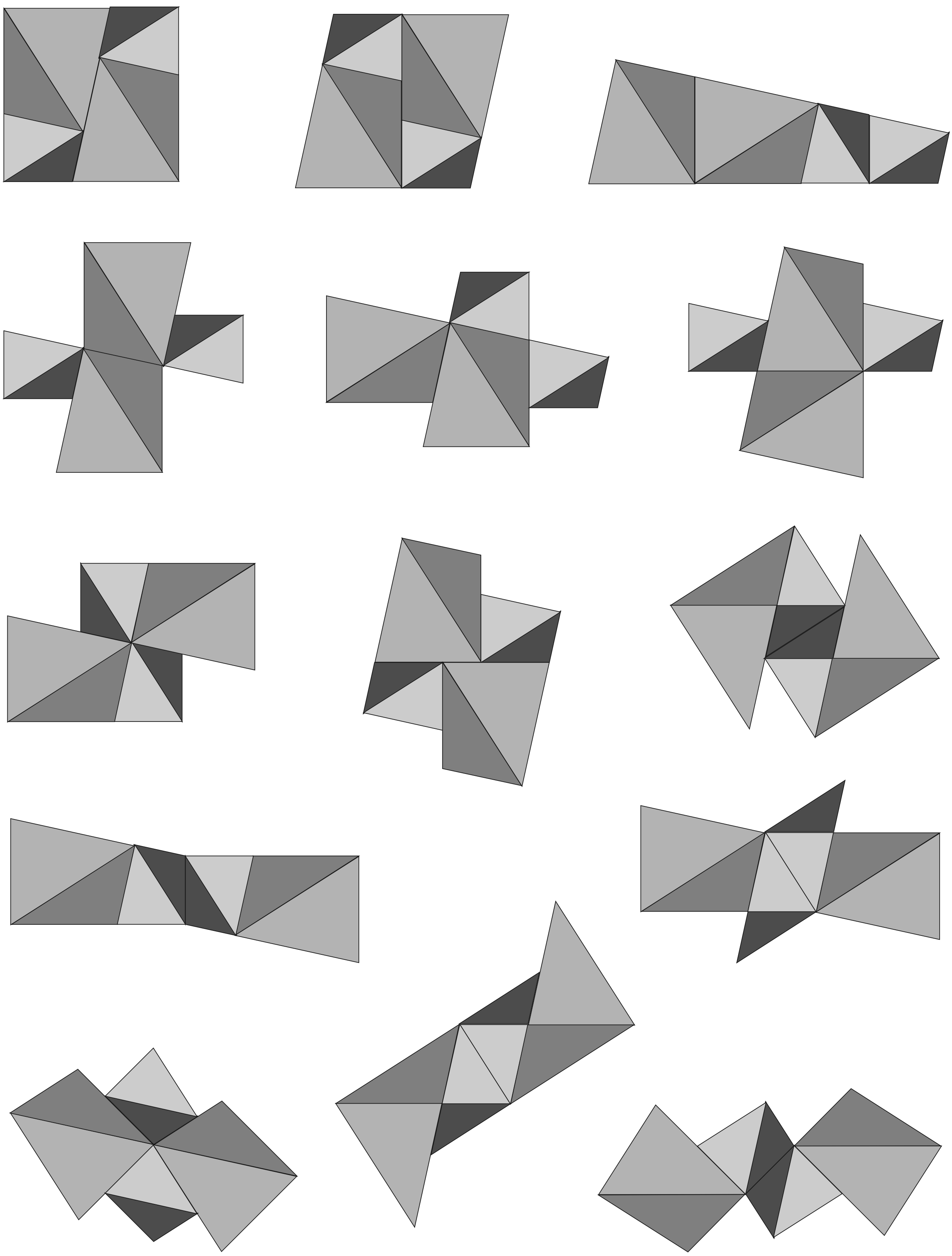
Variations

Avec les pièces de la fiche 4, réalise les figures ci-dessous. Observe bien les groupements des pièces dans le grand carré de la fiche 4 : un grand nombre des figures à réaliser sont des « variations » de ces groupements.



Puzzle de Pythagore-2

Variations - Solutions

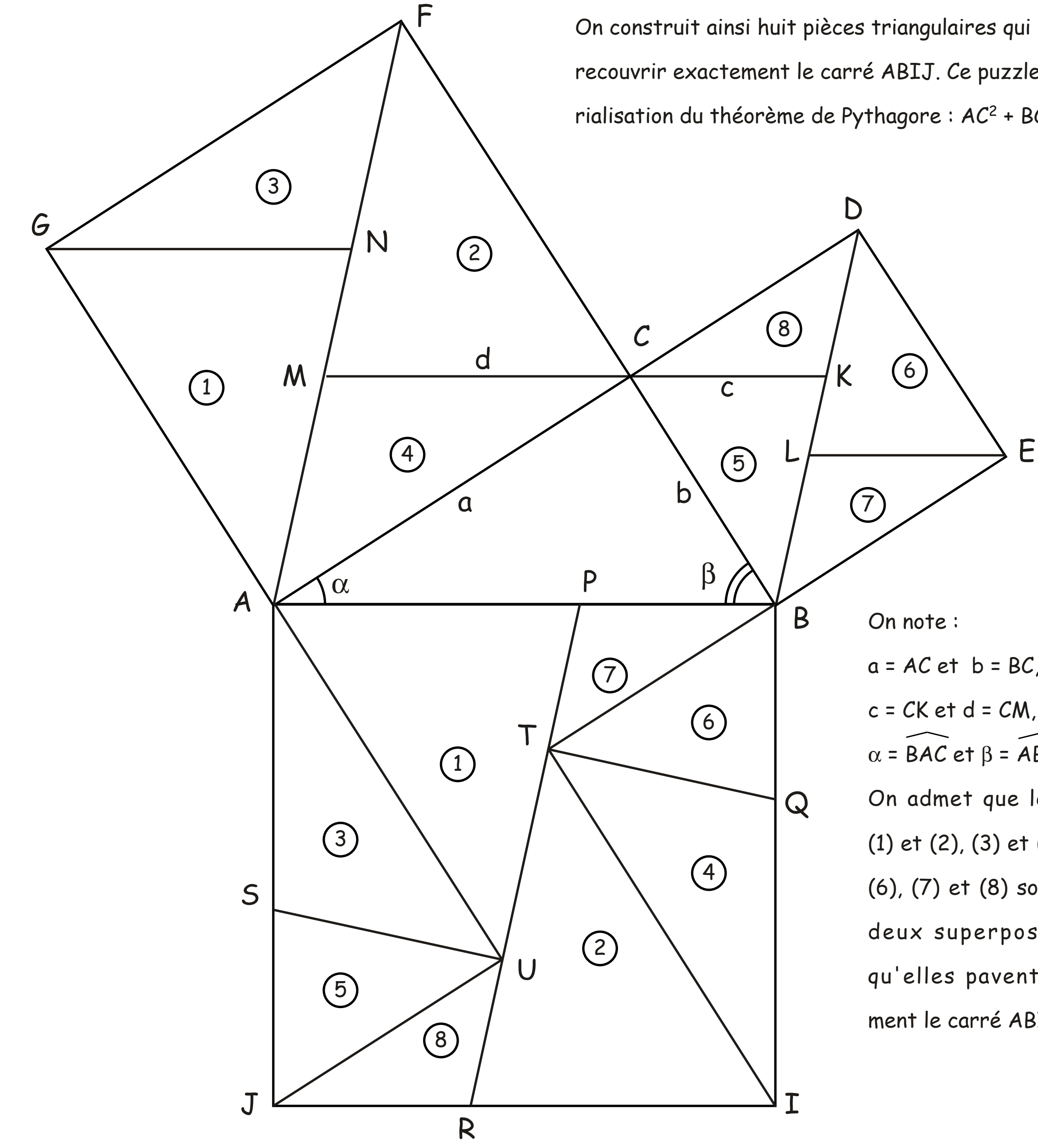


Puzzle de Pythagore-2

Pour aller plus loin : Jeu de cercles

BCDE, ACFG et ABIJ sont trois carrés construits sur les côtés du triangle ABC rectangle en C. En traçant les parallèles à (AB) passant par G, C et E, on obtient les points N, M, K et L.

On construit ainsi huit pièces triangulaires qui permettent de recouvrir exactement le carré ABIJ. Ce puzzle est une matérialisation du théorème de Pythagore : $AC^2 + BC^2 = AB^2$.



On note :

$a = AC$ et $b = BC$,

$c = CK$ et $d = CM$,

$\alpha = \widehat{BAC}$ et $\beta = \widehat{ABC}$.

On admet que les pièces (1) et (2), (3) et (4), (5) et (6), (7) et (8) sont deux à deux superposables et qu'elles pavent exactement le carré ABIJ.

On considère les quadrilatères APUS, BQTP, IQTR et JRUS. On va étudier plus particulièrement APUS.

1°) En étudiant la construction des pièces du carré ACFG, trouve la nature des triangles SAP et SUP.

Montre que le quadrilatère APUS est inscrit dans un cercle. Où se situe son centre ?

2°) Construis les cercles circonscrits aux quadrilatères APUS, BQTP, IQTR et JRUS.

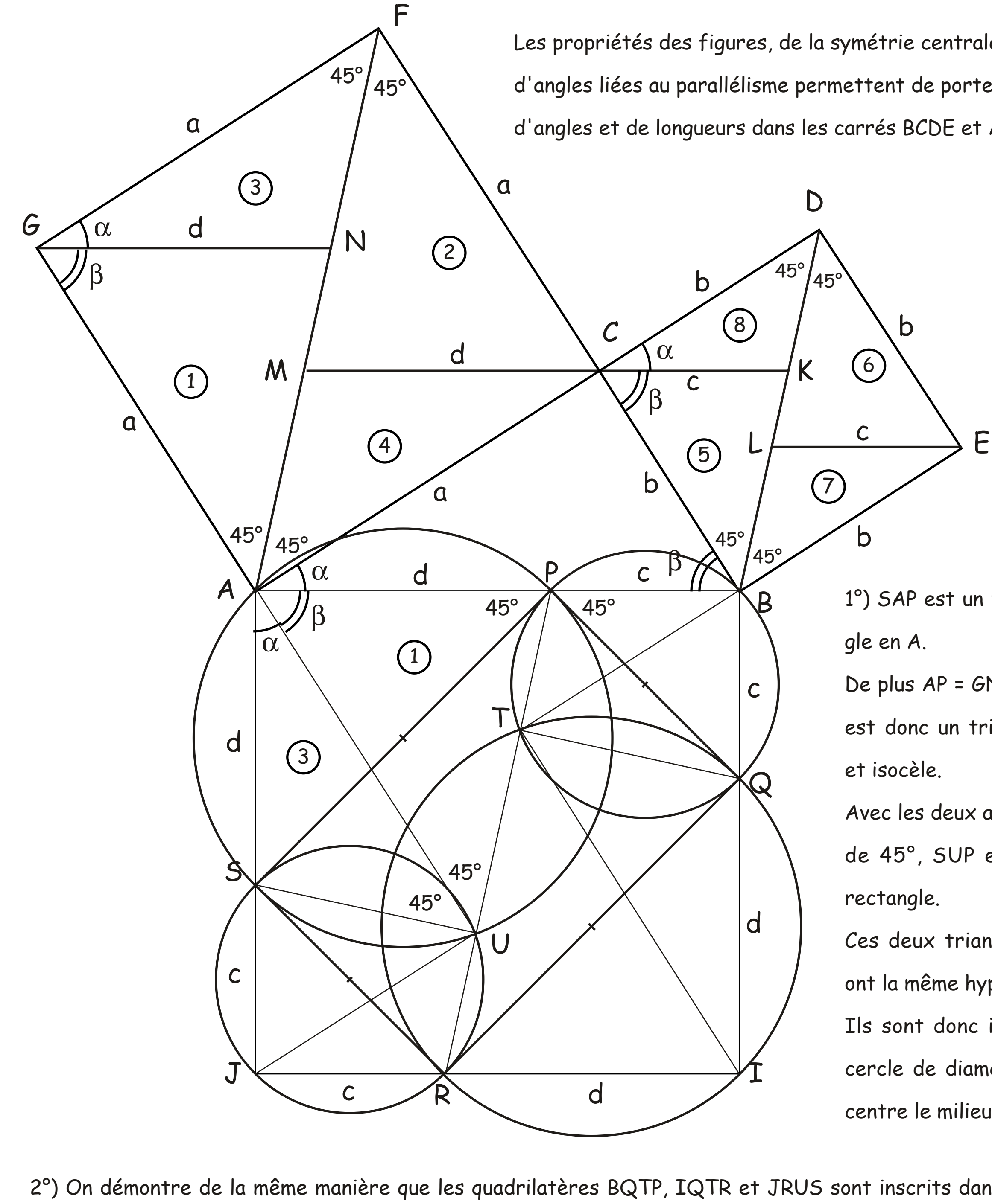
Montre que les droites (PS) et (QR) sont tangentes aux cercles circonscrits aux quadrilatères BQTP et JRUS.

3°) Quelle est la nature du quadrilatère PQRS ? Calcule l'aire de ce quadrilatère en fonction des longueurs c et d.

Puzzle de Pythagore-2

Jeu de cercles (Éléments de solutions)

Les propriétés des figures, de la symétrie centrale et des égalités d'angles liées au parallélisme permettent de porter les indications d'angles et de longueurs dans les carrés BCDE et ACFG.



1°) SAP est un triangle rectangle en A.

De plus AP = GN = AS = d. SAP est donc un triangle rectangle et isocèle.

Avec les deux angles adjacents de 45°, SUP est un triangle rectangle.

Ces deux triangles rectangles ont la même hypoténuse [SP]. Ils sont donc inscrits dans le cercle de diamètre [SP] et de centre le milieu de [SP].

2°) On démontre de la même manière que les quadrilatères BQTP, IQTR et JRUS sont inscrits dans les cercles de diamètres respectifs [PQ], [QR] et [RS]. Les triangles SAP et QBP étant rectangles et isocèles, les angles $\widehat{APS}$ et $\widehat{BPQ}$ mesurent 45°. Donc $\widehat{SPQ}$ = 90°. (SP) est donc perpendiculaire à (PQ) et ainsi tangente au cercle de diamètre [PQ].

3°) Comme on a montré que [SP] est perpendiculaire à [PQ], on démontre que les côtés du quadrilatère PQRS sont deux à deux perpendiculaires. PQRS est donc un rectangle. Deux manières d'obtenir l'aire de PQRS :

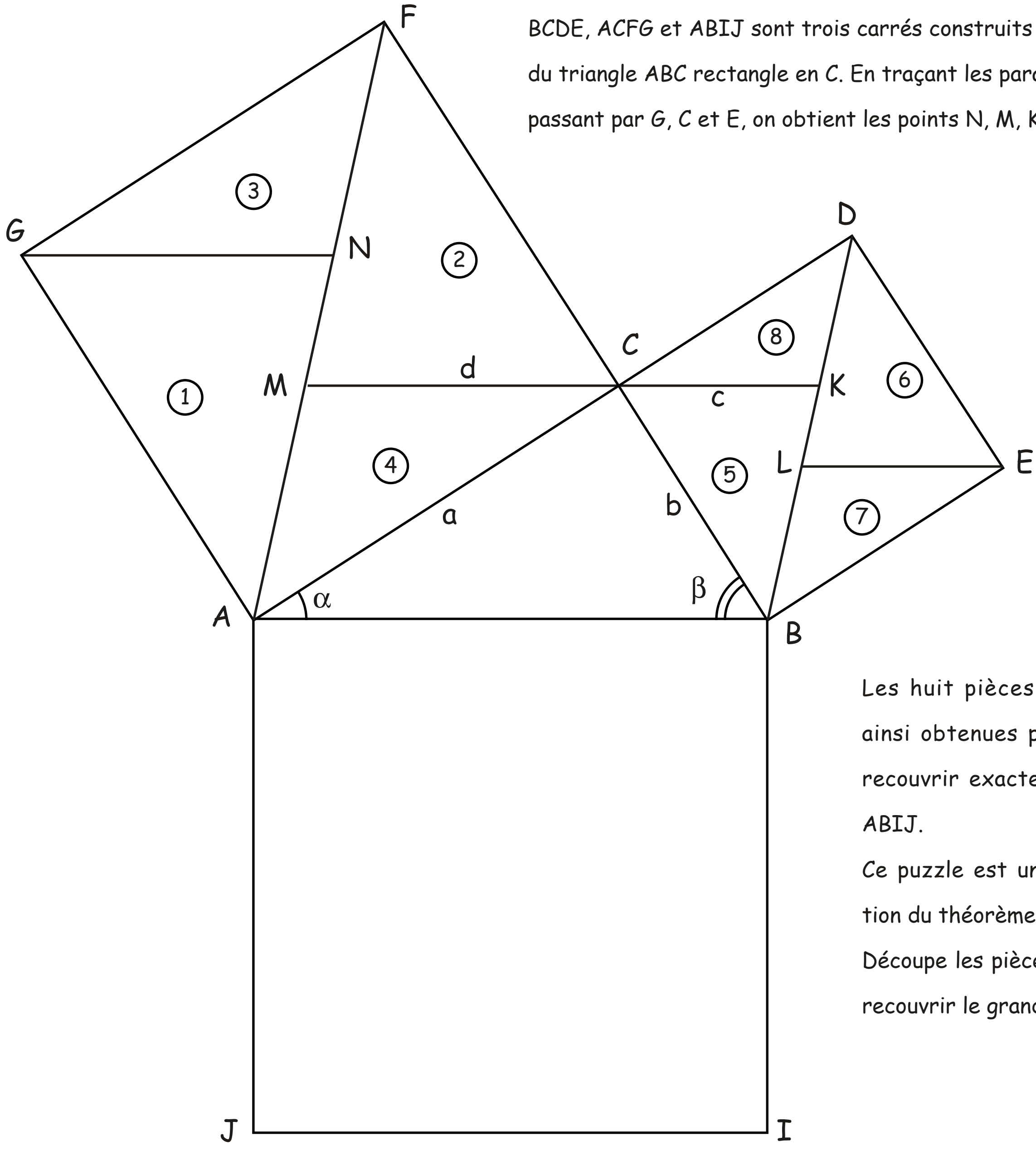
Aire(PQRS) = Aire(ABIJ) - 2xAire(APS) - 2xAire(PBQ) = $(c + d)^2 - c^2 - d^2 = 2cd$.

Aire(PQRS) = PS x PQ = $d\sqrt{2} \times c\sqrt{2} = 2cd$.

Puzzle de Pythagore-2

Pour aller plus loin : Agrandissement - réduction

BCDE, ACFG et ABIJ sont trois carrés construits sur les côtés du triangle ABC rectangle en C. En traçant les parallèles à (AB) passant par G, C et E, on obtient les points N, M, K et L.



Les huit pièces triangulaires ainsi obtenues permettent de recouvrir exactement le carré ABIJ.

Ce puzzle est une matérialisation du théorème de Pythagore.

Découpe les pièces et essaie de recouvrir le grand carré.

On note : a = AC et b = BC, c = CK et d = CM, $\alpha = \widehat{BAC}$ et $\beta = \widehat{ABC}$.

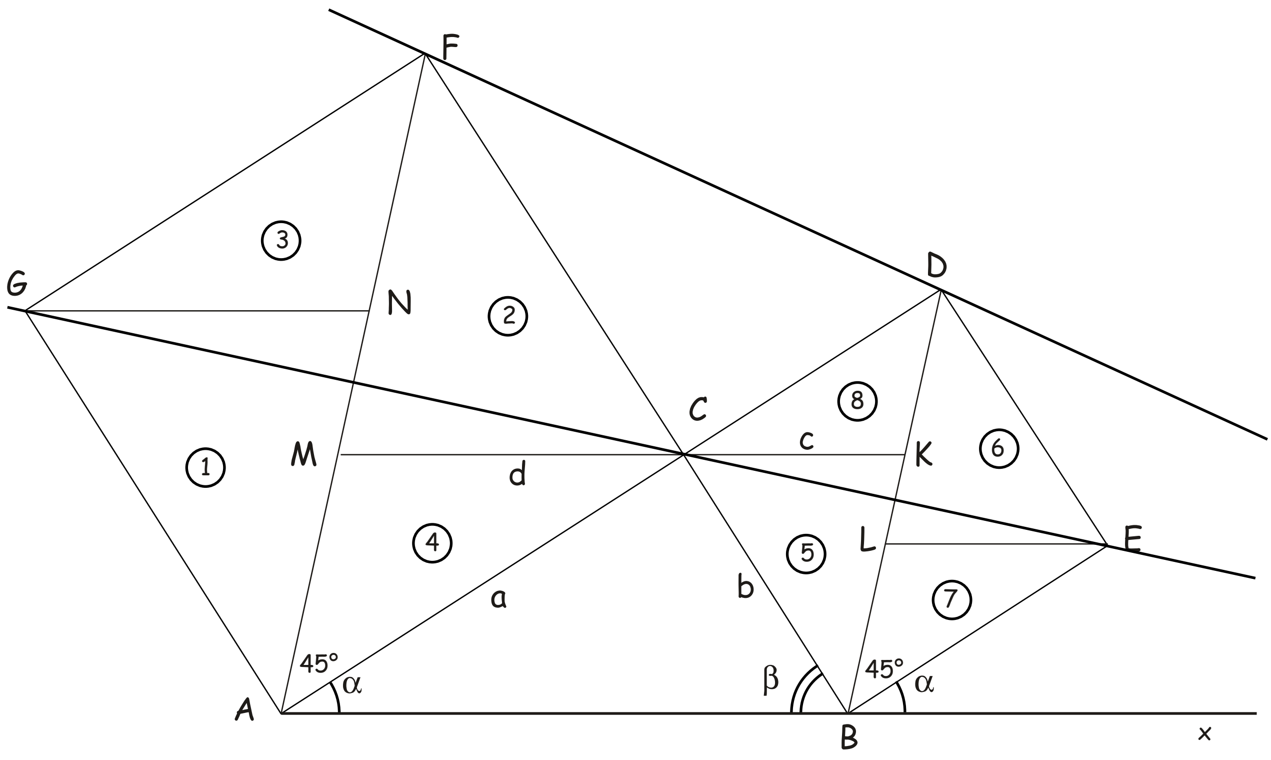
1°) Montre que les diagonales [AF] et [BD] sont parallèles.

2°) Montre que la pièce (6) est une réduction de la pièce (2) dans le rapport b/a.

3°) Les droites (AB) et (FD) se coupent en un point O. Montre que les points G, C et E sont alignés avec le point O.

Puzzle de Pythagore-2

Agrandissement - réduction (Éléments de solutions)



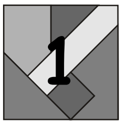
1°) (BE) étant parallèle à (AC), en prolongeant [AB], on retrouve l'angle α. De plus, $\widehat{FAC} = \widehat{DBE} = 45°$.

Les angles correspondants $\widehat{FAB}$ et $\widehat{DBx}$ sont égaux. Les droites (AF) et (BD) sont donc parallèles.

2°) Considérons les pièces (2) et (5). Les droites (AF) et (BD) étant parallèles, on peut appliquer le théorème de Thalès aux triangles MCF et KCB. On a les égalités suivantes : CB/CF = CK/CM = KB/MF = b/a. La pièce (5) est donc une réduction de la pièce (2) dans le rapport b/a. Or les pièces (5) et (6) sont images l'une de l'autre dans la symétrie centrale qui conserve le carré BCDE. Elles ont donc les mêmes dimensions. La pièce (6) est une réduction de la pièce (2) dans le rapport b/a.

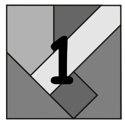
3°) Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires. (CG) et (CE) sont respectivement perpendiculaires à (AF) et (BD). Or (AF) et (BD) sont parallèles. Les droites (CG) et (CE) sont donc confondues et les points G, C et E sont alignés.

Les angles $\widehat{OAF}$ et $\widehat{OFA}$ ont la même mesure. Le triangle OAF est donc isocèle. Or (GE) est médiatrice de [AF]. Donc (GE) passe par le point O.



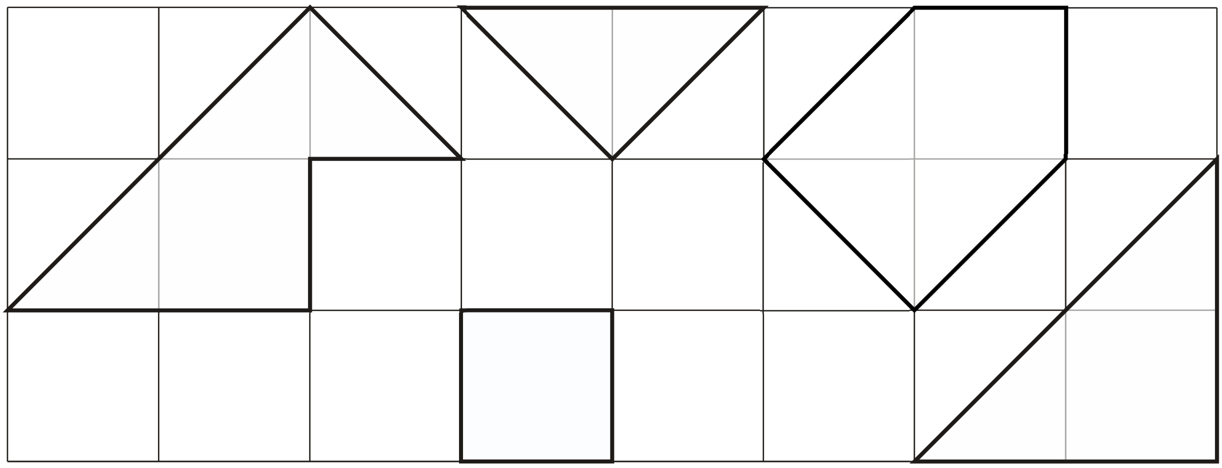
Puzzle de Saint-Max

Avec trois carrés



Première activité

Monsieur Lecarré possède un casse-tête dont les pièces sont représentées sur la figure ci-dessous.



Avec les quatre pièces non carrées, il peut fabriquer un carré.

Avec les cinq pièces, il peut aussi fabriquer un carré.

Sauras-tu reconstituer ces deux carrés ?

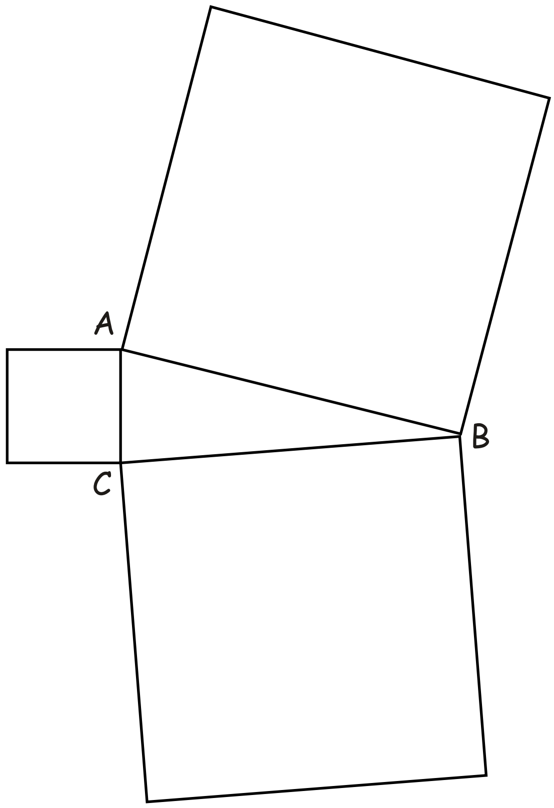
Deuxième activité

Pour cette deuxième activité, il te faut le double des pièces de ce puzzle. Tu peux, par exemple, faire cette activité avec ton voisin en mettant vos pièces en commun.

La première activité t'a permis d'obtenir finalement trois carrés : le petit carré correspondant à la pièce carrée, un deuxième carré obtenu avec les quatre autres pièces et un troisième carré obtenu avec l'ensemble des cinq pièces. Tu peux réaliser ce troisième carré avec le second puzzle.

Dispose ces trois carrés comme le montre le dessin ci-contre.

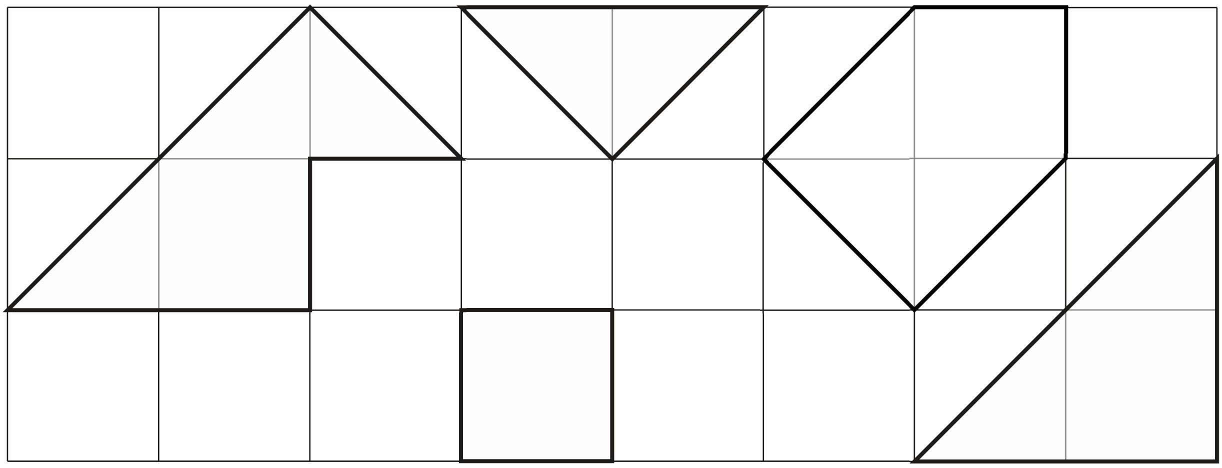
Pourquoi peux-tu affirmer que le triangle ABC est un triangle rectangle ?



Le puzzle de Saint-Max
Un troisième carré

Première activité

Monsieur Lecarré possède un casse-tête dont les pièces sont représentées sur la figure ci-dessous.



Avec les quatre pièces non carrées, il peut fabriquer un carré.

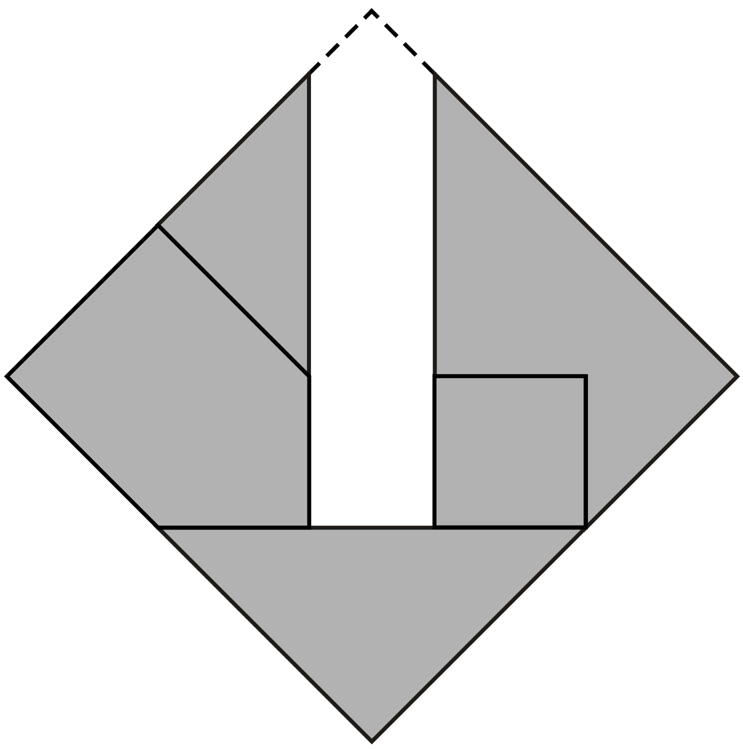
Avec les cinq pièces, il peut aussi fabriquer un carré.

Sauras-tu reconstituer ces deux carrés ?

Deuxième activité

1°) La maille du quadrillage ci-dessus étant choisie comme unité de longueur, indique sur le dessin ci-contre les dimensions des cinq pièces.

2°) Monsieur Lecarré ayant disposé ses pièces comme l'indique la figure ci-contre, il pense qu'en fabriquant la pièce manquante, on pourra reconstituer un nouveau carré.
Vérifie qu'il peut vraiment réaliser un carré et, pour l'aider à fabriquer la pièce manquante, précise les dimensions et l'aire de cette nouvelle pièce.

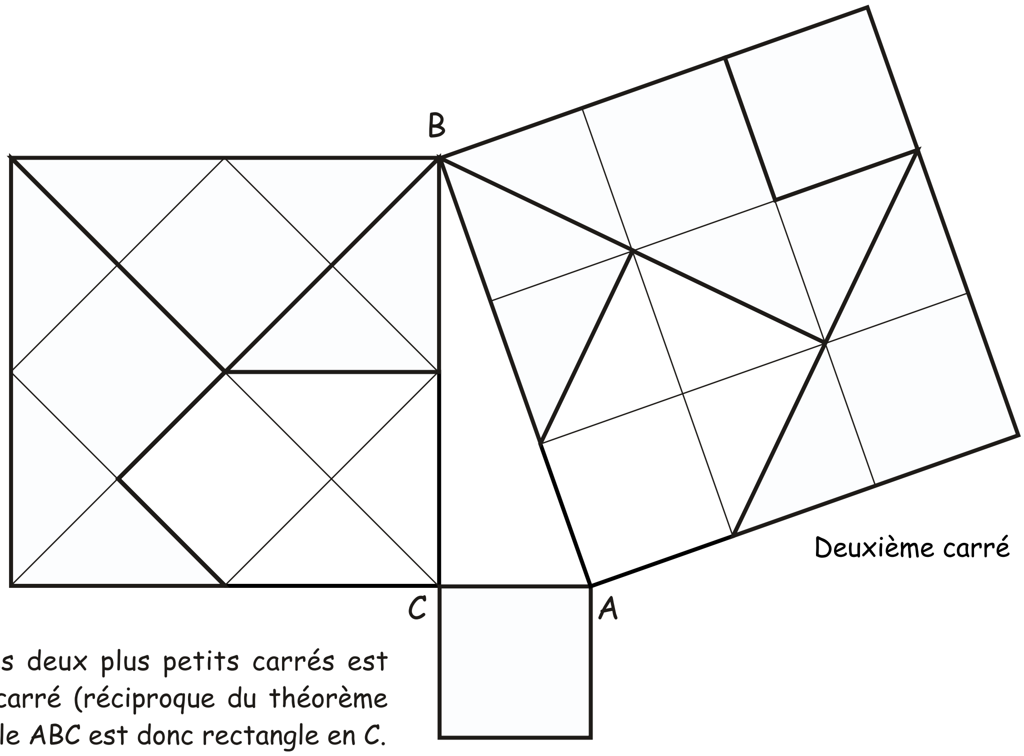


Le puzzle de Saint-Max

Solutions

Avec trois carrés

Premier carré



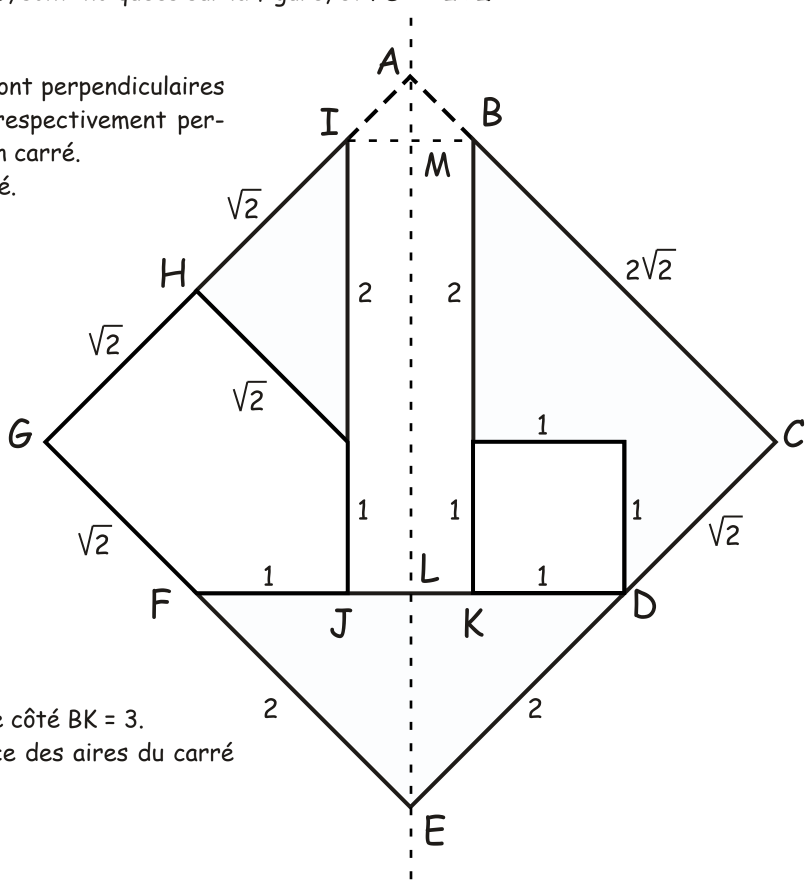
La somme des aires des deux plus petits carrés est égale à celle du grand carré (réciproque du théorème de Pythagore). Le triangle ABC est donc rectangle en C.

Un troisième carré

1°) Les dimensions des cinq pièces, excepté FD, sont indiquées sur la figure, et FD = $2\sqrt{2}$

2°) Existence du carré

GF = CD et EF = ED. Les côtés [EC] et [EG] sont perpendiculaires et ont la même longueur. [BC] et [IG] sont respectivement perpendiculaires à [EC] et [EG]. ACEG est donc un carré.
Prenons le côté de la pièce carrée comme unité.



Dimensions de la pièce manquante

Les quadrilatères FGIJ et BCDK sont symétriques par rapport à l'axe (AE). La pièce ABKJI admet (AE) comme axe de symétrie.
IJ = BK = 3
FJ = KD = 1, et FD = $2\sqrt{2}$.
Donc **JK = $\mathbf{2(\sqrt{2} - 1)}$**.
CE = EG = $2 + \sqrt{2}$.
AB = AC - BC = CE - BC = $2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$.
AB = AI = $\mathbf{2 - \sqrt{2}}$.

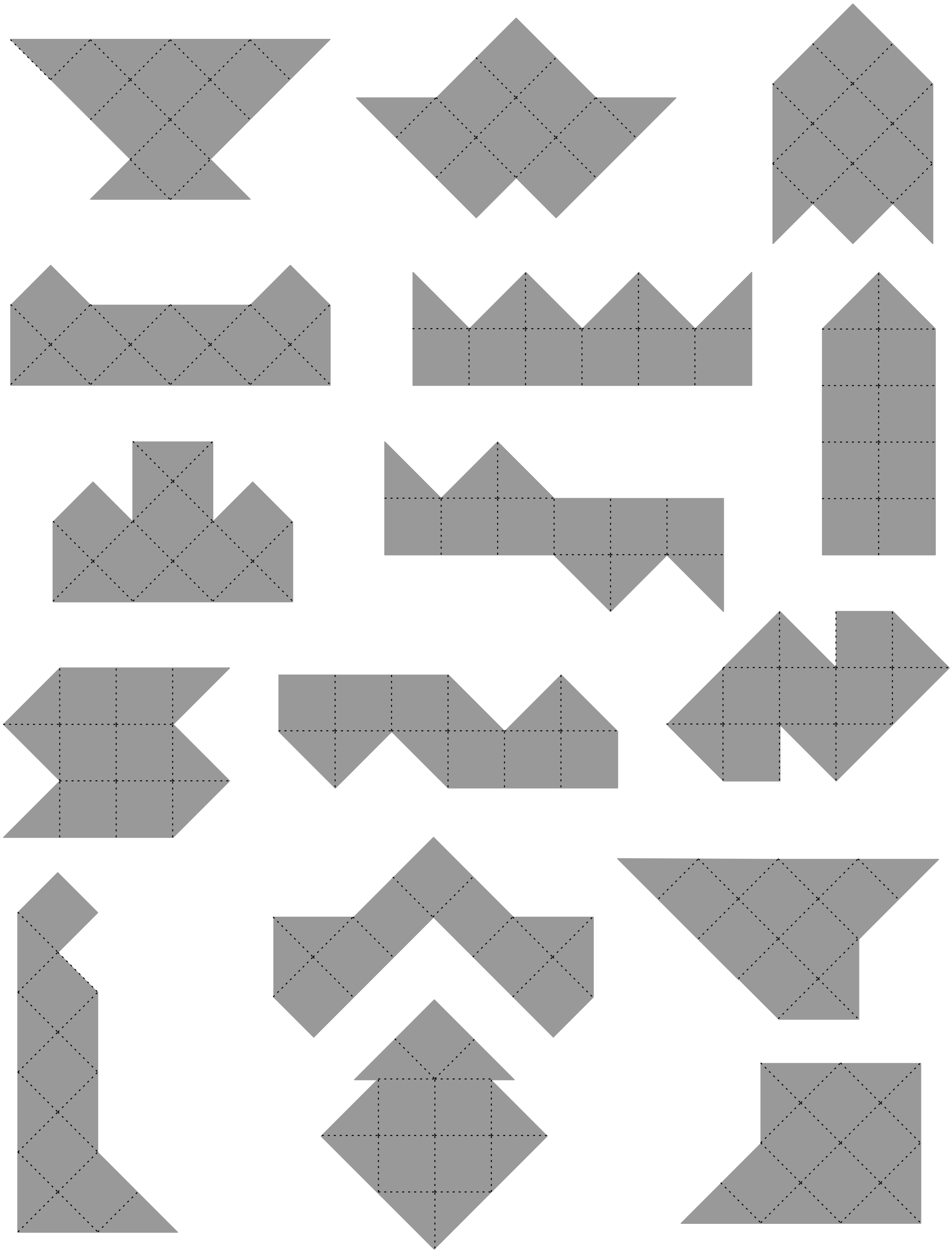
Aire de la pièce manquante

Les cinq pièces pavent exactement le carré de côté BK = 3.
L'aire de la pièce manquante est la différence des aires du carré de côté AC et du carré de côté BK.
Aire(ABKJI) = $(2 + \sqrt{2})^2 - 9 = 6 + 4\sqrt{2} - 9$.
Aire(ABKJI) = $\mathbf{4\sqrt{2} - 3}$.

Puzzle de Saint-Max

Des figures

Avec les cinq pièces du casse-tête de Monsieur Lecarré, réalise les figures suivantes.



Puzzle de Saint-Max

Des figures - solutions